Mathematik Übungsklausur (Gotthard-Basistunnel) 11.1

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die erste Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 \cdot (6x - 5)$

2) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{10}{3}x^4 + 2\cos(x) - 2$.

3) Löse die Gleichung $\frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^2} = 1 \quad (x \neq 0)$.

4) Welchen Flächeninhalt schließt das Schaubild der Funktion $f(x) = -x^2 + 3x$ mit der x-Achse ein?

5) Für die Funktion f gilt für alle $x \in [1;4]$:

(1) $f(x) < 0$

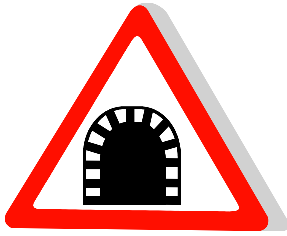
(2) $f'(x) > 0$

a) Welche Eigenschaften hat demnach das Schaubild von f?

b) Skizziere einen möglichen Verlauf des Schaubilds von f im Bereich $1 \leq x \leq 4$.

Mathematik Übungsklausur (Gotthard-Basistunnel) 11.1

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



Am 15. Oktober 2010 wurden die Bohrungen der Tunnelröhre des Gotthard-Basistunnels beendet. Für die Nutzung als Eisenbahntunnel sind zunächst weitere Planungen notwendig.
Um den Querschnitt der Tunnelröhre darzustellen, verwenden die Architekten die Funktion

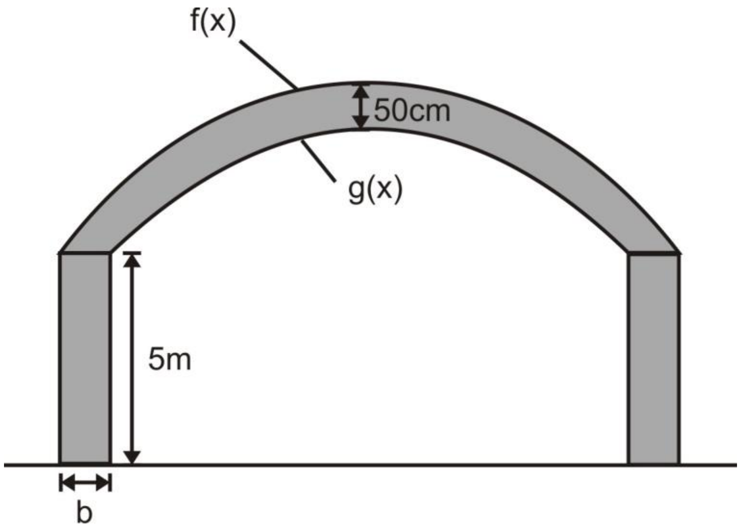
$$f(x) = -0{,}07x^2 + 0{,}7x + 8 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Metern}).$$

Der Boden des Tunnels ist bereits befestigt und verläuft entlang der Geraden $y = 0$.

a) (1) Zeichne den Querschnitt des Tunnels in ein Koordinatensystem.
(2) Berechne, wie breit die Tunnelröhre am Boden ist.
(3) Berechne, wie hoch die Tunnelröhre ist.

b) (1) Wie groß ist die Querschnittsfläche des gesamten Tunnels?
(2) Der Tunnel hat eine Länge von insgesamt 57km.
Bestimme das Luftvolumen innerhalb des gesamten Tunnels in Kubikmetern.

c) Die Wände des Tunnels sollen betoniert werden.
Der untere Rand der Tunnelröhre soll durch eine Funktionsgleichung der Gestalt $g(x) = f(x) - c$ beschrieben werden und rechts und links auf 5m hohen Mauern aufliegen (siehe Abbildung).



(1) Gib eine Funktionsgleichung von g(x) an (x und g(x) in Metern).
(2) Beschreibe ein Verfahren, wie die Mauerdicke b bestimmt werden kann.

Mathematik Übungsklausur (Gotthard-Basistunnel) 11.1

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = 6x + \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = 6x^3 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 18x^2 - 10x$

2) $F(x) = \frac{2}{3}x^5 + 2\sin(x) - 2x$

3) $4 + 3x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Subst.: $u = x^2$ $u^2 - 3u - 4 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$ $u_1 = 4; u_2 = -1$

Rücksubst.: $x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_{1/2} = \pm 2}$ $x^2 = -1$ k.L.

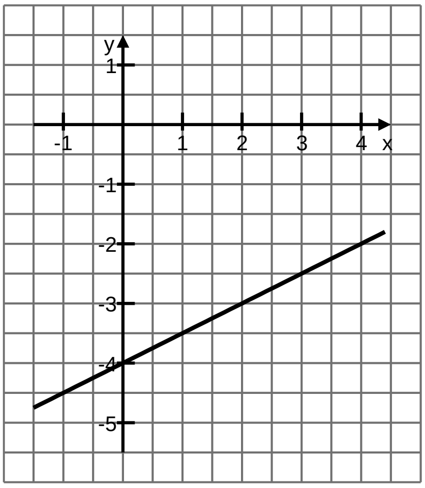
4) (1) Nullstellen: $-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$

(2) Flächeninhalt: $A = \int_0^3 -x^2 + 3x\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$

5) a) (1) Die Funktion liegt im Intervall $[1;4]$ unterhalb der x-Achse.

(2) Die Steigung der Funktion ist im Intervall $[1;4]$ positiv.

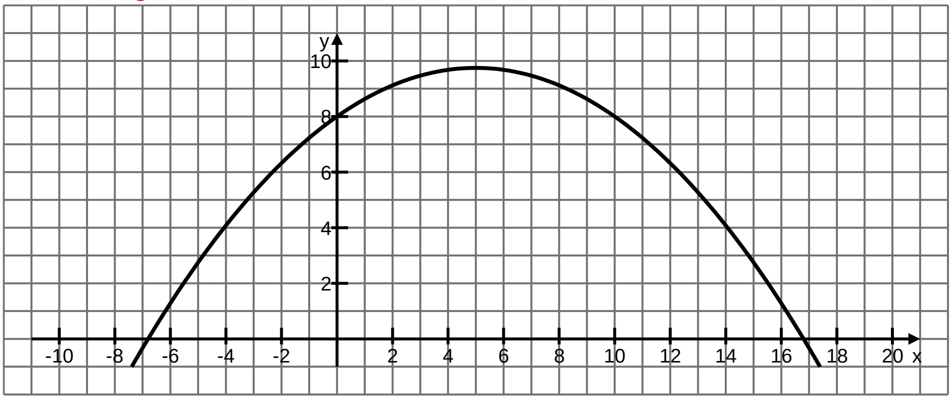
b) Zeichnung



Mathematik Übungsklausur (Gotthard-Basistunnel) 11.1

Lösungen Wahlteil:

a) (1) Zeichnung



(2) $f(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}07x^2+0{,}7x+8=0 \Leftrightarrow x^2-10x-\frac{8}{0{,}07}=0 \Rightarrow x_{1/2}=5\pm\sqrt{25+\frac{8}{0{,}07}}$

$x_1 \approx 16{,}80$ oder $x_2 \approx -6{,}80 \Rightarrow \text{Breite} = 6{,}80+16{,}80 = \boxed{23{,}60\text{m}}$

(3) $f'(x)=-0{,}14x+0{,}7=0 \Rightarrow x=5$

$f(5)=9{,}75 \Rightarrow$ Höhe = $\boxed{9{,}75\text{m}}$

b) (1) $\int_{-6,80}^{16,80} f(x)dx = \left[-\frac{0{,}07}{3}x^3+\frac{0{,}7}{2}x^2+8x\right]_{-6,80}^{16,80}$

$=\left(-\frac{0{,}07}{3}16{,}80^3+\frac{0{,}7}{2}16{,}80^2+8\cdot 16{,}80\right)-\left(-\frac{0{,}07}{3}(-6{,}80)^3+\frac{0{,}7}{2}(-6{,}80)^2+8\cdot(-6{,}80)\right)$

$=153{,}43 \Rightarrow \boxed{153{,}43\text{m}^2}$

(2) $V=153{,}43\text{m}^2\cdot 57.000\text{m} = \boxed{8.745.510\text{m}^3}$

c) (1) $g(x)=f(x)-0{,}5=-0{,}07x^2+0{,}7x+\underline{7{,}5}$

(2) 1. Schritt: $f(x)=5 \Rightarrow$ Schnittstellen s_1; s_2

2. Schritt: $g(x)=5 \Rightarrow$ Schnittstellen t_1; t_2

3. Schritt: Breite: $b=t_1-s_1$ (bzw. $b=s_2-t_2$)